

Obliczanie całek (Zadania do samodzielnego rozwiązania.)

Zad. 1. Stosując wzór na całkowanie przez części obliczyć podane całki nieoznaczone.

a) $\int x \sin x \, dx$ Odp.: $-x \cos x + \sin x + C$

b) $\int x \cos x \, dx$ Odp.: $x \sin x + \cos x + C$

c) $\int x e^x \, dx$ Odp.: $e^x (x - 1)$

d) $\int x e^{-x} \, dx$ Odp.: $-e^{-x} (x + 1)$

e) $\int x \operatorname{arc\,tg} x \, dx$ Odp.: $(x^2 + 1) \operatorname{arc\,tg} x - x + C$

f) $\int \ln x \, dx$ Odp.: $x (\ln x - 1) + C$

g) $\int \ln^2 x \, dx$ Odp.: $x (\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + C$

Zad. 2. Korzystając z metody całkowania przez podstawienie wyznaczyć podane niżej całki nieoznaczone.

a) $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$ Odp.: $2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + C$

b) $\int \operatorname{tg} x \, dx$ Odp.: $-\ln |\cos x| + C$

c) $\int x \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$ Odp.: $-\frac{1}{3} \sqrt{(a^2 - x^2)^3} + C$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}$ Odp.: $2 \ln |\sqrt{x} + \sqrt{x+1}| + C$

e) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ Odp.: $\operatorname{arc\,tg} e^x + C$

Wskazówka: $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$

f) $\int \frac{dx}{x \ln_3 x}$ Odp.: $\ln |\ln x| + C$

g) $\int \frac{x^3}{1 + x^8} \, dx$ Odp.: $\frac{1}{4} \operatorname{arc\,tg} x^4 + C$

h) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ Odp.: $\operatorname{arc\,tg} (x + 1) + C$

i) $\int \sin 7x \, dx$ Odp.: $-\frac{1}{7} \cos 7x + C$

j) $\int e^{-5x} \, dx$ Odp.: $-\frac{1}{5} e^{-5x} + C$

k) $\int \frac{x \, dx}{2x^3 - 3x - 2}$ Odp.: $\frac{1}{5} \ln \left((x - 2)^2 \sqrt{2x + 1} \right) + C$

l) $\int \frac{dx}{x^3 + x}$ Odp.: $\ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}} + C$

Zad. 3. Obliczyć wartości poniższych całek oznaczonych.

a) $\int_1^e \ln x \, dx$ Odp.: 1

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx$ Odp.: $\frac{1}{2} \ln 2$

c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos x}$ Odp.: 2

d) $\int_0^2 |1 - x| \, dx$ Odp.: 1

e) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}$ Odp.: $\arctg 4 - \arctg 3$

f) $\int_0^2 f(x) dx$ gdzie: $\begin{cases} x^2 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{dla } 1 < x \leq 2 \end{cases}$ Odp.: $\frac{5}{6}$

g) Wykazać, że, $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$ Wskazówka: W którejkolwiek z całek podstawić $t = 1 - x$

Zad. 4. Obliczyć poniżej podane całki niewłaściwe.

a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4}$ Odp.: $\frac{1}{3}$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} dx$ Odp.: 0

c) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ Odp.: Całka jest rozbieżna.

d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ Odp.: π

e) $\int_0^1 x \ln x dx$ Odp.: $-\frac{1}{4}$

Zad. 5. Obliczyć poniższe całki podwójne po zadanych obszarach.

a) $\int_D \int_D xy dx dy$ Odp.: 1 $D = \{(x, y); x \in [0, 1], y \in [0, 2]\}$

b) $\int_D \int_D e^{x+y} dx dy$ Odp.: $(e - 1)^2$ $D = \{(x, y); x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$

Zad. 6. Obliczyć poniższe całki krzywoliniowe

a) $\int_L xy ds$ gdzie: L brzeg prostokąta o wierzchołkach $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 2)$, $D(0, 2)$ Odp.: 24

b) $\int_L xy dx + (y - x) dy$ gdzie: L wykres funkcji $y = x^2$ dla $x \in [0, 1]$ Odp.: $\frac{1}{12}$

c) $\int_L x dx + y dy + (x + y - 1) dz$ gdzie: L jest odcinkiem: $x(t) = 1 + t$, $y(t) = 1 + 2t$, $z(t) = 1 + 3t$ dla $t \in [0, 1]$ Odp.: 13

UWAGA Zachęcam do rozwiązania wszystkich zadań. Nie określam terminu i nie będę sprawdzał czy wszyscy zrobili. Jeśli byłyby kłopoty ze znalezieniem rozwiązań jakichś zadań, to rozwiążemy je na ćwiczeniach. Uważam jednak, że powinni Państwo spróbować rozwiązać każde zadanie.